Universität Duisburg – Essen
Seminar: Quellen zur Geschichte der Mathematik
Wintersemester 2006/2007
Dozent: Professor Dr. Jahnke

Referatsausarbeitung

Euklids Elemente – Buch I und Parallelentheorie

Vorgelegt von:

Entfernt	Dominique Arndt
Entfernt	Theodor-Heuss-Straße 26
Entfernt	42553 Velbert
Entfernt	webmaster@oceanborn.org
Entfernt	Lehramt an Gymnasien und Gesamtschulen
Entfernt	Mathematik & Geschichte
Entfernt	7. Fachsemester

Inhaltsverzeichnis

I. Einleitung

Euklids Elemente, von dem Dunham respektvoll als „bible of mathematics“[1] spricht ist eines der seit der Antike meistgelesenen und am häufigsten edierten Werke der Geschichte. Für uns von besonderem Interesse ist das Parallelenaxiom des ersten Buches, mit dem Euklid nachfolgende Mathematikergenerationen über Jahrtausende beschäftigte und schließlich dazu antrieb neuere Geometrien einzuführen. Ebenfalls soll die klare logisch-axiomatische Struktur der Elemente aufgezeigt werden, die bis dahin einmalig in der Mathematik der Antike ist.
Ziel dieser Ausarbeitung ist es also, den vorgetragenen Stoff nochmals darzustellen, zu erklären, zu erläutern und gegebenenfalls Vergleiche oder Bezüge zu anderen Themen oder zur Behandlung durch andere Mathematiker zu ziehen. Es soll aber auch ein wenig über Euklid und Die Elemente - besonders das erste Buch - berichtet werden. Ähnlich wie im Vortrag folgt die Ausarbeitung der Struktur des ersten Buches. Wichtige Definitionen und Postulate sollen zitiert und erläutert werden um dem Leser ein Grundrüstzeug an die Hand zu geben. Anschließend wird nur eine Auswahl von Propositionen betrachtet, die entweder direkten Bezug zur Entwicklung des Parallelenbegriffes oder aber eine besondere Verbindung zur Mathematik der Gegenwart haben. Hierbei sollen die Propositionen zunächst in der Übersetzung nach Thaer zitiert werden. Die Beweise könnten selbstverständlich auch heute noch direkt von Euklid übernommen werden, doch bestünde hierin wohl keine große Eigenleistung, weshalb die Beweise in ihren logischen Schlüssen erhalten, jedoch in die moderne mathematische Sprache übersetzt werden. Anschließend finden sich zu jeder Proposition Anmerkungen die den Zusammenhang zu vorhergehenden oder noch folgenden Propositionen erläutern und ihre Verbindung zum Parallelenaxiom oder der Geometrie der Gegenwart erklären sollen.

[1] Dunham, S.30.

II. Hauptteil

Definitionen

Zu Beginn stehen 23 (oder bei anderer Zählweise 35) Definitionen. Hier wird alles definiert, was im weiteren Verlauf des Buches verwendet wird. Auch scheinbar offensichtliche Grundlagen werden hier erläutert.

„1. Ein Punkt ist, was keine Teile hat,
2. Eine Linie breitenlose Länge.
3. Die Enden einer Linie sind Punkte.
[...]
4. Eine Fläche ist, was nur Länge und Breite hat.
5. Die Enden einer Fläche sind Linien
[...]
8. Ein Ebener Winkel ist die Neigung zweier Linien in einer Ebene gegeneinander, die einander treffen, ohne einander gerade fortzusetzen.“[2]

Nachdem Euklid in den ersten Definitionen die Grundlagen für Punkte, Linien bzw. Strecken, Flächen bzw. Ebenen und Winkel angegeben hat, beschreibt er dann einige Figuren und ihre Eigenschaften.

„15. Ein Kreis ist eine ebene, von einer einzigen Linie [die Umfang (Bogen) heißt] umfasste Figur mit der Eigenschaft, dass ale von einem innerhalb der Figur gelegenen Punkte bis zur Linie [zum Umfang des Kreises] laufende Strecken einander gleich sind.
[...]
19. Geradlinige Figuren sind solche, die von Strecken umfasst werden, dreiseitige die von drei, vierseitige die von vier, vielseitige die von mehr als vier Strecken umfassten.“[3]

[2] Euklid: 1. Buch. Definitionen 1-5, 8. In Edition: Seite 1.
[3] Euklid: 1. Buch. Definitionen 15, 19. In Edition: Seite 1f.

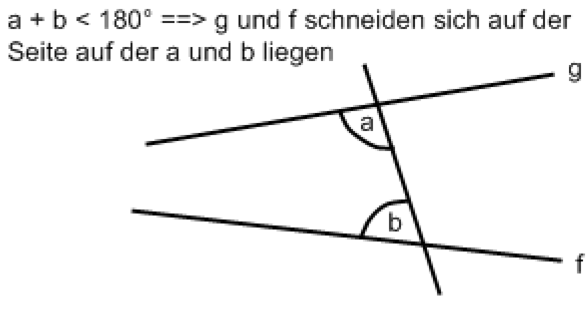
In Definition 23 wird dann festgelegt, was parallel bedeutet.

> „23. Parallel sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und dabei, wenn man sie nach beiden Seiten ins unendliche verlängert, auf keiner einander treffen.“[4]

Hier ist festzuhalten, dass Euklid lediglich definiert was ‚parallel' in seinem Wortsinn bedeutet, er jedoch keinerlei Aussage über Existenz (Proposition 31, Existenz durch Konstruktion) oder Eindeutigkeit (Postulat V) trifft.

Postulat V

„Und dass, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.“[5]



<u>Anmerkungen:</u> *Joyce spricht vom Postulat V als dem „historically the most interesting postulate“*[6]*. Viele Geometer versuchten das Parallelenpostulat zu widerlegen, kamen dabei jedoch zu vielfach abstrusen Ergebnissen, die dazu führten, dass sich die Meinung einbürgerte dass das fünfte Postulat aus den vier vorangehenden folgen müsse. Erst im frühen 19. Jahrhundert fanden Bolyai, Lobachevsky und Gauß Möglichkeiten mit den ‚nicht-euklidischen' Geometrien, eben jenen in denen das Parallelenpostulat nicht gilt, umzugehen und sie zu beschreiben.*[7]

---

[4] Euklid: 1. Buch. Definition 23. In Edition: Seite 2.
[5] Euklid: 1. Buch. Postulat 5. In Edition: Seite 3.
[6] Joyce: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/post5.html
[7] ebenda

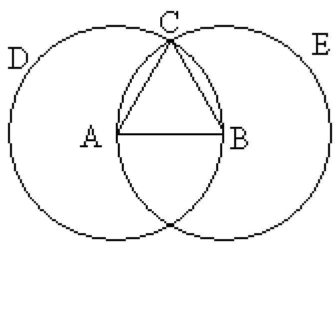
Euklid verzichtet in den Propositionen 1 - 28 auf die Nutzung des Parallelenpostulates und beweist somit einige Sachverhalte, die heute der ‚absoluten Geometrie' zugerechnet werden. Besonders interessant ist hier ein Vergleich der Sätze 16 und 32, der später in der Ausarbeitung durchgeführt um die Unterschiede zwischen absoluter und euklidischer Geometrie zu verdeutlichen.

I.1 - Proposition 1

„Über einer gegebenen Strecke ein gleichseitiges Dreieck zu errichten."[8]

Konstruktion:

„Die gegebene Strecke sei AB. Man soll über der Strecke AB ein gleichseitiges Dreieck errichten. Mit A als Mittelpunkt und AB als Abstand zeichne man den Kreis BCD (Post.3), ebenso mit B als Mittelpunkt und BA als Abstand den Kreis ACE; ferner ziehe man vom Punkt C, in dem die Kreise einander schneiden, nach den Punkten A, B die Strecken CA, CB (Post. 1). Da Punkt A Mittelpunkt des Kreises CDB ist, ist AC = AB (I, Def. 15); ebenso ist, da Punkt B Mittelpunkt des Kreises CAE ist, BC = BA: Wie oben bewiesen, ist auch CA = CB; also sind CA und CB beide = AB. Was aber demselben gleich ist, ist auch einander gleich (Ax. 1); also ist auch CA = CB; also sind CA, AB, BC alle einander gleich.
Also ist das Dreieck ABC gleichseitig (I, Def. 20); und es ist über der gegebenen Strecke AB errichtet – dies hatte man ausführen sollen."[9]



q.e.f.

[8] Euklid: 1. Buch. Proposition 1. In Edition: Seite 3.
[9] Euklid I.1. In Edition: Seite 3f.

Anmerkungen:

Satz und Beweis sind an und für sich leicht verständlich und nachvollziehbar und dennoch stellt auch diese Proposition uns vor einige Fragen. Zunächst einmal stellt sich die Frage, warum Euklid gerade diesen Satz, der zwar in Proposition 2 und darausfolgend 3 genutzt wird, für die Propositionen danach aber relativ unwichtig ist, an den Anfang stellt. Zum einen liefern die Konstruktionen in 1-3 Möglichkeiten Linien zu verschieben und abzutragen, etwas was in vielen nachfolgenden Sätzen zwar nicht explizit ausgesprochen genutzt wird, aber doch häufig angewandt wird. Zum anderen bilden die Konstruktionen zu Beginn von Buch I und die Konstruktionen der fünf platonischen Körper in Buch XIII eine runde Klammer um das Gesamtwerk. Die zweite Frage ist die nach der Rechtfertigung des Beweises, denn es stellen sich durchaus einige Fragen zu Lücken in der Beweisführung, auf die Euklid teilweise in späteren Büchern eingeht, die aber bei streng axiomatischem, modernem Aufbau eigentlich vorher geklärt werden müssten. Das ist auch der Grund aus dem die Konstruktion exakt aus den Elementen übernommen wurde, obwohl noch in der Einleitung angekündigt wurde dies eigentlich nicht machen zu wollen. Zur besseren Analyse der Denkweise Euklids ist es jedoch unumgänglich. Nun stellen sich folgende Probleme:
Warum zum Beispiel existiert der Punkt C als Schnitt zweier Kreise? Dieser Frage wendet sich Euklid erst in Buch III einigermaßen zu, genauso wie erst in Buch XI geklärt wird, warum ABC überhaupt eine ebene Figur sein muss. Schon in der Antike kritisierte unter anderem Zeno von Sidon (1. Jhd. v. C.) den Beweis, da darin nicht gezeigt wäre, dass sich die Geraden von A und B ausgehend nicht bereits unterhalb des Punktes C in einem anderen Punkt P treffen könnten, wenn also die Geraden APC und BPC einen gemeinsamen Abschnitt PC besitzen würden, eine Problematik die Zeno selbst dadurch löst, indem er als weitere Annahme einführt, dass zwei nicht-gleiche, gerade Linien eben keine gemeinsamen Abschnitte haben können. Euklids Argumentation steht also nicht nur nach modernen, sondern bereits nach antiken Beurteilungen, auf wackligen Füßen.

I.4 - Proposition 4

„Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten zwei Seiten entsprechend gleich sind und die von den gleichen Seiten eingeschlossenen Winkel einander gleich, dann muss in ihnen auch die Grundlinie der Grundlinie gleich sein, das Dreieck muss dem Dreieck gleich sein, und die übrigen Winkel müssen den übrigen Winkeln entsprechend gleich sein, nämlich immer die, denen gleiche Seiten gegenüberliegen.“[10]

<u>Beweis:</u>

Vorraussetzungen: Dreiecke ABC und DEF mit

1.) AB = DE
2.) AC = DF
3.) Winkel BAC = Winkel EDF.

Behauptungen:

1.) BC = EF
2.) Winkel ABC = DEF
3.) Winkel ACB = DFE

Lege nun den Punkt A auf den Punkt D, sowie AB auf die Linie DE ⇒ B liegt auf E (Vor. 1)

Analog folgt nun mit (Vor. 2 & 3) dass C auf F liegt. Da nun B auf E, sowie C auf F liegt muss gelten BC = EF. Angenommen BC ≠ EF. Dann würden die beiden Geraden zusammen eine Fläche umschließen. Dies widerspricht Axiom 9.

⇒ ABC deckt DEF ab und ist ihm gleich ⇒Auch die Winkel aus den Behauptungen 2 und 3 sind gleich.

q.e.d.

<u>Anmerkungen:</u>

Euklid beweist hier das uns als SWS bekannte Kongruenztheorem, auch wenn er das Wort kongruent in unserer heutigen Bedeutung (Drei gleiche Seiten, drei gleiche Winkel, Flächengleichheit) nicht benutzt. Vielmehr weist Joyce darauf hin, dass Euklid nicht von Kongruenz, sondern von ‚Ähnlichkeit und Gleichheit' spricht.[11] *Diese Proposition soll als Beispiel dienen für die schulmathematische Wichtigkeit der Elemente, da hier immer wieder geometrische Sätze bewiesen werden, die in der Schule behandelt werden. Alternativ hätte*

[10] Euklid: I.4. In Edition: Seite 5.
[11] Joyce: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/propI4.html

man ebenfalls Proposition I.8 (SSS) oder Proposition I.26 (WSW) behandeln können. Euklid beweist in den Elementen nicht das uns als SSW bekannte Kongruenztheorem, sondern bringt hier nur in III.14 eine Proposition für Seite-Seite-90°Winkel und in VI.7 ein SSW Ähnlichkeitstheorem. Der Beweis erscheint uns aus heutiger Sicht auch ein wenig seltsam, da einfach das eine Dreieck auf das andere gelegt wird und dann von der Vorraussetzungen ausgehend einmal ‚rundgegangen' und geschaut wird, ob alle Behauptungen auch den Tatsachen entsprechen. Eine ungewohnte, aber dennoch valide Beweisführung, auch wenn hier aufgrund der Einbindung der vorrangegangenen drei Propositionen sämtliche Probleme die in Proposition I.1 aufgezeigt wurden ebenfalls auftauchen, so dass zum Beispiel Hilbert das SAS in seiner Geometrie als Axiom IV.6 auffasste.[12]

I.15 - Proposition 15

„Zwei gerade Linien bilden, wenn sie einander schneiden, Scheitelwinkel, die einander gleich sind.“[13]

<u>Beweis:</u>

Vorraussetzungen: Zwei gerade Linien AB und CD, die sich im Punkt E schneiden.

Behauptungen:

1.) Winkel AEC = Winkel DEB
2.) Winkel CEB = Winkel AED

Nach I.13 ergeben sich die beiden folgenden Gleichungen:

a) Winkel CEA + Winkel AED = 180°
b) Winkel AED + Winkel DEB = 180°

Gleichsetzen und Abziehen von Winkel AED auf beiden Seiten liefert und dann die Behauptung 1. Analog lässt sich die Behauptung 2 beweisen.

q.e.d.

<u>Anmerkungen:</u>

Hier verwendet Euklid den Begriff des Scheitelwinkels. Dies ist auffällig, da er vorher nicht definiert, was ein solcher ist. Selbst wenn Kenntnis über solche Winkel vorausgesetzt wird

[12] Dunham: S.39.
[13] Euklid: I.15. In Edition: Seite 12.

verwundert dies, da in den Definitionen zu Beginn selbst einfaches wie ein Punkt definiert wird.
Dieser Beweis weißt einige schöne Vorgehensweisen bei der Beweisführung auf. Es werden sowohl Axiome als auch ein anderer vorher bewiesener Paragraph zitiert. Das Muster ist denkbar einfach. Zweifache Rückführung auf eine schon bekannte Situation, gleichsetzen der Ergebnisse. Mit den zu Beginn festgelegten Axiomen folgt die Behauptung.

I.16 - Proposition 16

„An jedem Dreieck ist der bei der Verlängerung einer Seite entstehende Außenwinkel größer als jeder der beiden gegenüberliegenden Innenwinkel.“[14]

Beweis:
Gegeben sei das Dreieck ABC. Man verlängere nun die Seite BC weiter zu einem beliebigen Punkte D. Die Behauptung ist nun dass der Außenwinkel ACD größer ist als die beiden gegenüberliegenden Innenwinkel CBA und BAC.
Hierzu halbiere man AC im Punkt E nach I.10 und verlängere BE noch einmal um die Gerade BE um den Punkt F zu erhalten. Verlängere nun AC beliebig um den Punkt G zu erhalten.
Nun sind die Vorrausetzungen für Proposition I.4 erfüllt, da AE = EC, BE = EF und Winkel AEB = Winkel FEC, woraus folgt, dass die Dreiecke AEB und FEC kongruent sind.

⇒ Winkel BAE = Winkel ECF

Gleichzeitig gilt aber Winkel ECD > Winkel ECF

⇒ Winkel ACD > BAE was zu zeigen war.

Analog folgt die Aussage für den zweiten Innenwinkel, wenn man anstatt AC zu halbieren nun die Seite BC halbiert.

q.e.d.

Anmerkungen:
Im später ausgeführten Satz I.32 beweist Euklid eine stärkere Version dieses Satzes, benutzt dann allerdings das Parallelenpostulat. Die vorrangegangenen 15 Propositionen haben auch in der absoluten Geometrie Bestand, die Proposition 15 ist jedoch nur in einigen Geometrien

[14] Euklid: I.16. In Edition: Seite 13.

gültig, ist aber zum Beispiel in der elliptischen Geometrie ungültig, da in der elliptischen Geometrie Postulat II keine Gültigkeit besitzt und somit die Verlängerung von BE nach F nicht mehr notwendigerweise funktionieren muss. Legendre nutzte diesen Satz Euklids um für die absolute Geometrie zu beweisen, dass die Winkelsumme im Dreieck nicht größer sein kann als 180°.[15]

I.17 – Proposition 17

„In jedem Dreieck sind zwei Winkel, beliebig zusammengenommen, kleiner als zwei Rechte.“[16]

Beweis:

Das Dreieck sei ABC. Behauptung ist, dass in ABC je zwei Winkel zusammen immer kleiner sind als 180°. Hierzu verlängere man BC nach D.. Der Außenwinkel ACD ist dann nach I.16 größer als der gegenüberliegende Innenwinkel ABC. Man füge auf beiden Seiten den Winkel ACB hinzu und erhalte die folgende Ungleichung:

Winkel ACD + Winkel ACB > Winkel ABC + Winkel BCA

Nach I.13 ist aber ACD + ACD = 180°, daraus folgt die Behauptung. Analog kann man die Behauptung für die beiden anderen entstehenden Außenwinkel und das jeweils andere Paar von Innenwinkeln beweisen.

q.e.d.

Anmerkungen:

Auch dieser Beweis geht auf einen schon bewiesenen Paragraphen zurück. Auffallend ist hier, dass die Benennung der Winkel nicht eindeutig ist. So soll auf beiden Seiten ACB hinzugefügt werden, in der Ungleichung steht dann jedoch auf der rechten Seite BCA. Hier sieht man deutlich, dass die heute oftmals verwendete Konvention „Punkt auf dem einen Schenkel – Scheitelpunkt – Punkt auf dem zweiten Schenkel => Winkel durch drehen gegen den Uhrzeigersinn“ nicht verwendet wird.

[15] Euklid: Anmerkungen I.16. In Edition: Seite 422.
[16] Euklid: I.17. In Edition: Seite 13.

I.20 - Proposition 20

„In jedem Dreieck sind zwei Seiten, beliebig zusammengenommen, größer als die letzte.“[17]

Beweis:

Gegeben sei das Dreieck ABC. Behauptet wird nun, dass die drei folgenden Ungleichungen immer erfüllt sind:

1.) BA + AC > BC
2.) AB + BC > AC
3.) BC + CA > AB

Hierzu verlängere man BA um die Länge CA zum Punkt D und ziehe DC. Da DA = AC gilt auch, Winkel ADC = Winkel ACD (nach I.5), also Winkel BCD > Winkel ADC. Da DBC ein Dreieck mit Winkel BCD > Winkel BDC ist, liegt dem größeren Winkel auch die größere Seite gegenüber (I.19), also DB > BC. Da aber DB = AC + BA ist entseht die gesucht Ungleichung 1. Analog lassen sich die Behauptungen 2 und 3 beweisen.

q.e.d.

Anmerkungen:

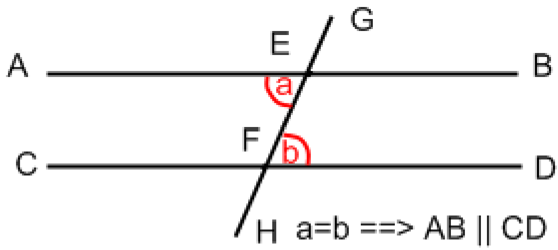
Diese Proposition wurde ausgewählt, da sie uns auch heute noch durch die ‚modernen' Vorlesung als die beliebte DUGL oder auch Dreiecksungleichung verfolgt. Schon in der Antike wurde die Ungleichung zum Beispiel im Zusammenhang mit Proposition I.15 durch Heron von Alexandria genutzt um Probleme des kürzesten Weges zwischen zwei Punkten über eine Linie auf denen die beiden Punkte nicht liegen, zu lösen.[18]

Diese Proposition zeigt zudem eindrucksvoll, dass Euklid auch für die Zeitgenossen eigentlich triviale Sätze lieber in eine Proposition mit einem Beweis aus seinen Axiomen heraus formuliert, als diese selbst zu einem Postulat zu erheben.[19]

[17] Euklid: I.20. In Edition: Seite 14.
[18] Vgl. Joyce: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/propI20.html
[19] Dunham: S.42.

I.27 - Proposition 27

„Wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien einander gleiche (innere) Wechselwinkel bildet, müssen diese geraden Linien einander parallel sein.“[20]



<u>Beweis:</u>

Die gerade Linie EF bilde nun beim Schnitt mit AB und CD einander gleiche Wechselwinkel. Nun müssen AB und CD parallel sein. Angenommen AB und CD seien nicht parallel. Dann müssten sich AB und CD im Punkte S schneiden. Es gelte nun, dass sie sich in auf der Seite treffen auf der B und D liegen. Dann wäre im Dreieck SEF der Außenwinkel AEF dem gegenüberliegenden Innenwinkel EFG gleich nach I.16, was aber unmöglich ist. Also treffen sie sich nicht auf der Seite auf der B und D liegen. Analog kann man zeigen dass sie dies auch nicht auf der Seite von A und C tun. Da sich die beiden Geraden auf keiner Seite schneiden sind sie nach Definition 23 parallel.

q.e.d.

<u>*Anmerkungen:*</u>

Euklid benutzt hier zum ersten Mal in den Propositionen den Begriff ‚parallel’, vermeidet aber dennoch die Nutzung des Parallelenpostulates, auch wenn Satz und Postulat eng verknüpft sind wenn man sie umformuliert:

Postulat V a: Wenn eine gerade Linie zwei andere gerade Linien schneidet und die Wechselwinkel nicht gleich sind, dann treffen sich die beiden anderen geraden Linien [auf einer bestimmten Seite].

Proposition I.27 a: Wenn eine gerade Linie zwei andere gerade Linien schneidet und die Wechselwinkel gleich sind, dann treffen sich die beiden anderen geraden Linien nicht.

In dieser Umformulierung ist die Proposition I.27 nur die Contraposition des Parallelenpostulats, damit nach den Gesetzen der Logik äquivalent und müsste nicht

[20] Euklid: I.27. In Edition: Seite 20.

bewiesen werden, Euklid beweist die Contraposition dennoch mit einem Widerspruchsbeweis und der Aussage der Grundposition.[21]

Ebenfalls hätte man I.27 direkt aus I.16 ableiten können da Treffen auf beiden Seiten jeweils zu sofortigem Widerspruch führen würde.[22]

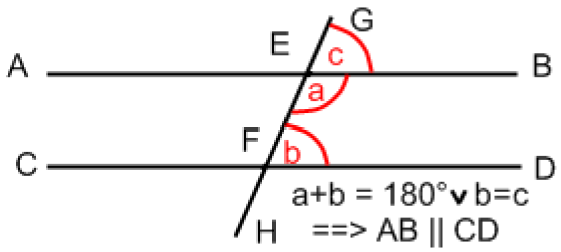
Die Verwendung des Begriffs des Wechselwinkels ist, wie die Bezeichnung Scheitelwinkel in I.15 fraglich.

Interessant ist ebenfalls die bildliche Darstellung des potentiellen Schnitts im unendlichen, zwei parallele Geraden werden einfach zu einem Schnittpunkt verbunden, so dass es sich eigentlich schon nicht mehr um Geraden handelt.

Dies verwendet Euklid, um den Widerspruch deutlich zu machen. Würde dieser Schnitt tatsächlich existieren, würde dies dem Axiom 9 widersprechen, was Euklid jedoch nicht in seinem Beweis nutzt.

I.28 - Proposition 28

„Wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass ein äußerer Winkel dem auf derselben Seite innen gegenüberliegenden gleich oder innen auf derselben Seite liegende Winkel zusammen zwei Rechten gleich werden, dann müssen diese geraden Linien einander parallel sein.“[23]



<u>Beweis:</u>

Vorraussetzungen:

1.) Winkel GEB = Winkel EFD oder
2.) Winkel BEH + Winkel GFD = 180°

---
[21] Vgl. Joyce: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/propI27.html
[22] Freudenthal: S. 191.
[23] Euklid: I.28. In Edition: Seite 20.

Behauptung:

1.) AB || CD

Gilt Vorraussetzung 1, so ist auch Winkel GEB = Winkel AEF (I.15) und es folgt die Parallelität nach I.27.

Im Fall der Vorraussetzung 2, gilt auch Winkel AEF + Winkel BEH = 180° (I.13) und es folgt durch Gleichsetzung und Subtraktion von Winkel BEH die Gleichung Winkel AEF = Winkel GFD, welche ebenfalls die Vorraussetzungen von I.27 erfüllen.

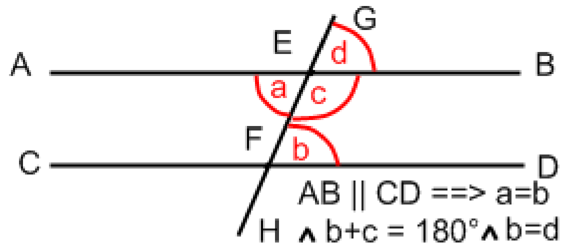
q.e.d.

<u>*Anmerkungen:*</u>

Euklid beweist hier zwei Varianten von I.27, die mit anderen Vorraussetzungen dasselbe Ergebnis erzielen, ein äußerst sinnvoller Trick, wenn man nicht andauernd erst die Vorraussetzungen entsprechend anpassen möchte um den Satz anzuwenden. Ansonsten findet sich in diesem Satz jedoch nicht viel Neues.

I.29 - Proposition 29

„Beim Schnitt einer geraden Linie mit (zwei) parallelen geraden Linien werden (innere) Wechselwinkel einander gleich, jeder äußere Winkel wird dem innen gegenüberliegenden gleich, und innen auf derselben Seite entstehende Winkel werden zusammen zwei Rechten gleich.“[24]



<u>Beweis:</u>

EF schneide die parallelen geraden Linien AB und CD. Dann gelten die folgenden Behauptungen:

1.) Winkel AEF = Winkel EFD

[24] Euklid: I.29. In Edition: Seite 21.

2.) Winkel GEB = Winkel EFD

3.) Winkel BEF + Winkel EFD = 180°

Angenommen Winkel AEF ≠ Winkel EFD, so müsste einer der Winkel größer sein. ObdA sei Winkel AEF der größere Winkel, so füge man beiderseits den Winkel BEF hinzu und erhält nun die folgende Gleichung:

Winkel AEF + Winkel BEF > Winkel EFD + Winkel BEF

Winkel AEF + Winkel BEF = 180° nach I.13.

⇒ Winkel EFD + Winkel BEF < 180°

Nach Postulat V müssten sich AB und CD nun aber treffen, was aber nach Vorraussetzung nicht möglich ist, da AB ‖ CD. Hieraus folgt Behauptung 1.

Weiterhin gilt nach I.15 Winkel AEF = Winkel GEB, also auch Winkel GEB = Winkel EFD und somit Behauptung 2. Füge nun auf beiden Seiten der Gleichung den Winkel BEF hinzu und erhalte die Gleichung:

Winkel GEB + Winkel BEF = Winkel EFD + Winkel BEF

Nach I.13 gilt aber Winkel GEB + Winkel BEF = 180° und somit auch Behauptung 3.

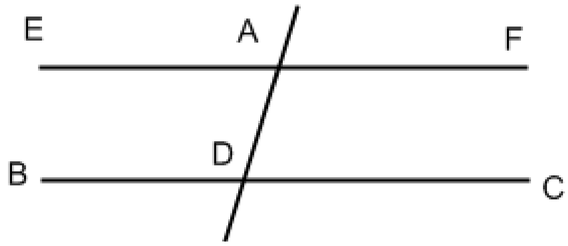
q.e.d.

Anmerkungen:

Proposition 29 ist die Umkehrung der Aussagen der Propositionen 27 & 28 und nutzt zum ersten Mal im ersten Buch das Parallelenpostulat. Nachdem mit Proposition 16 (und der Anwendung von Postulat II) bereits die Aussagengültigkeit für die elliptische Geometrie gekippt wurde, kippen mit der Anwendung von Postulat V nun auch andere Geometrien aus dem Gültigkeitsrahmen, wie zum Beispiel die hyperbolische Geometrie, für die die Aussagen der Sätze 1-28 durchaus Gültigkeit haben. Während in der elliptischen Geometrie überhaupt keine Parallele zu einer Gerade durch einen gegebenen Punkt existiert und es in der euklidischen (parabolischen) Geometrie exakt eine solche Parallele gibt, finden sich in der hyperbolischen Geometrie beliebig viele, ein Umstand der zum Beispiel in der Differentialgeometrie zur Charakterisierung genutzt wird.

I.31 - Proposition 31

„Durch einen gegebenen Punkt eine einer gegebenen geraden Linie parallele gerade Linie zu ziehen.“[25]



<u>Konstruktion:</u>

Gegeben sei eine Linie BC und ein Punkt A der nicht auf BC liegt. Wähle nun beliebig einen Punkt D auf BC und trage an die gerade Linie DA im Punkte A den Winkel DAE = Winkel ADC gemäß I.23 an und verlängere EA nach F. Da die Gerade AD beim Schnitt mit BC und EF einander gleiche Wechselwinkel bildet (nach Konstruktion), gilt EAF || BC nach I.27.

q.e.f.

<u>Anmerkungen:</u>

Die Proposition ermöglicht es die eine mögliche Parallele zu finden, die durch A zu BC existiert. Die Konstruktion funktioniert auch in der hyperbolischen Geometrie, jedoch ist hier die erzeugte Parallele von der Wahl von D abhängig.[26] *Eigentlich wäre es bereits mit I.16 möglich gewesen eine Parallele zu konstruieren, es wird jedoch vermutet, dass Euklid die Konstruktion aufschiebt, bis deren Eindeutigkeit feststeht.*[27]

---

[25] Euklid: I.31. In Edition: Seite 23.
[26] Vgl. Joyce: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/propI31.html
[27] Freudenthal: Seite 191.

I.32 - Proposition 32

„An jedem Dreieck ist der bei der Verlängerung einer Seite entstehende Außenwinkel den beiden gegenüberliegenden Innenwinkeln zusammen gleich, und die drei Winkel innerhalb des Dreiecks sind zusammen zwei Rechten gleich.“[28]

Beweis:

Gegeben sei das Dreieck ABC. Man verlängere nun die Seite BC nach D. Nun gelten die folgenden Behauptungen:

1.) Winkel ACD = Winkel CAB + Winkel ABC
2.) ABC + BCA + CAB = 180°.

Ziehe nun CE parallel zu AB durch C (I.31.). Da AB || CE und beide von AC geschnitten werden, gilt nach I.29 Winkel BAC = Winkel ACE. Ebenso gilt, da AB || CE und sie von BD geschnitten werden nach I.29, dass Winkel ECD = Winkel ABC, woraus Behauptung 1 folgt Füge nun auf beiden Seiten den Winkel ACB hinzu und erhalte die Gleichung:

Winkel ACD + Winkel ACB = Winkel ABC + Winkel BCA + Winkel CAB

Nach I.13 ist aber Winkel ACD + Winkel ACB = 180° und Behauptung 2 ist bewiesen.

q.e.d.

Anmerkungen:

Euklid beweist hier die stärkere Version von I.16 und schließt mit diesem Satz fürs erste ein Kapitel ab um in den nächsten Sätzen auf die Abhängigkeit der Flächen von Dreiecken und Parallelogrammen mit gleicher Grundseite hinzuarbeiten, ein ebenfalls sehr interessanter Bereich, der aber im Vortrag nicht vorgekommen ist und hier nun ebenfalls den Rahmen sprengen würde.

[28] Euklid: I.32. In Edition: Seite 23.

I.46 - Proposition 46

„Über einer gegebenen Strecke das Quadrat zu zeichnen."[29]

Konstruktion:

Gegeben sei die Strecke AB über der man das Quadrat zeichnen soll. Man ziehe hierzu AC rechtwinklig zu AB in A nach I.11 und trage AD = AB ab. Anschließend konstruiere man DE || AB durch D, sowie BE || AD durch B nach I.31.

Dann ist ABDE ein Parallelogramm, da AB = DE und AD = BE (I.34), aber da AB = AD ist, sind alle vier Seiten gleich lang und ABDE ist ein gleichseitiges Parallelogramm. Zu zeigen bleibt nun die Rechtwinkligkeit. Die Parallelen AB und DE werden von AD geschnitten, weshalb nach I.29 gilt, dass Winkel BAD + Winkel ADE = 180°, Winkel BAD ist aber nach Konstruktion ein rechter Winkel, somit auch Winkel ADE. Da aber die gegenüberliegenden Winkel im Parallelogramm einander gleich sind, sind alle vier Winkel rechte Winkel. Da ABDE ein gleichseitiges, rechtwinkliges Parallelogramm ist, erfüllt es die Vorraussetzungen der Definition 22 und ist ein Quadrat, welches über AB gezeichnet wurde.

q.e.f.

Anmerkungen:

Euklid benutzt hier eine relativ kurze und simple Konstruktion mit sechs Hilfskreisen und vier Linien, deren Schnitte er betrachtet. Es gibt einige alternative Konstruktionen, die etwas kürzer sind, so lässt sich E zum Beispiel finden indem man um D und B Kreise mit dem Radius AB schlägt[30]*, doch nimmt dies dieser Konstruktion nichts von ihrer Schönheit.*

[29] Euklid: I.46. In Edition: Seite 31.

[30] Joyce: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/propI46.html

III. Schluss

Normalerweise wäre es die Aufgabe des Schlussteils einen Ausblick zu bieten oder die Kernthesen noch einmal zu wiederholen, doch als Referatsausarbeitung vermisst die Arbeit sowohl Thesen, als auch ein weiteres Themenfeld. Es wurde versucht dem Leser den mathematischen Wert der Elemente, 2300 Jahre nach deren Entstehung näherzubringen, zum einen den akademischen Wert mit dem Euklid noch Jahrtausende später Mathematiker inspirierte das Parallelenpostulat zu beweisen oder zu widerlegen und schlussendlich neue Geometrien zu finden, zum anderen aber auch den Wert für den Schulgebrauch, da Euklid fast alle Sätze der Schulgeometrie in seinem Werk bearbeitet und in klarer logischer und doch sehr einfacher und durchschaubarer Weise beweist. Gleichzeitig wurde auch Wert darauf gelegt zu zeigen, dass Euklids Ansichten über axiomatische Vollständigkeit keineswegs denen heutiger Mathematiker entsprechen (vergleiche hierzu insbesondere I.1) und bereits in der Antike durchaus Kontroversen über die Notwendigkeiten einzelner oder zusätzlicher Postulate bestand. Die Elemente sind als solches ein Standardwerk, das jeder Mathematiker zumindest einmal in der Hand gehabt, besser gelesen und im besten Falle vollständig verstanden haben sollte, was auch wenn es sich ‚nur' um Elementargeometrie handelt, nicht immer ohne ein zweites oder drittes Hinschauen möglich ist.

IV. Literaturverzeichnis

a) Quellen:

Euklid: Die Elemente. Übersetzt und herausgegeben von Clemens Thaer. 4. erweiterte Auflage. Frankfurt am Main. 2003.

Euclid: Elements. Translated and annotated by D.E. Joyce.
http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html
(letzter Besuch: 26.02.2007)

b) Literatur:

William Dunham: Journey through Genius. The Great Theorems of Mathematics. New York. 1990.

Hans Freudenthal: Nichteuklidische Geometrie im Altertum. In: Archive for History of Exact Sciences. Volume 43. Number 3. Seite 189-197. Herausgegeben von Bos, Henk J.M.; Buchwald, Jed Z.. Berlin / Heidelberg. 1991.